作业五（解答/提示）

<u>练习7.5</u>

1.

(3). 略

(4). 略

2.(2)

计算出所有的一阶导数和二阶导数，然后带入带Peano余项的Taylor公式即可。注意到这里 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 关于 x 和 y 对称，因此我们可以用这种对称性来简化计算。

<u>练习7.6</u>

1.

(1)

不难得出 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$ ， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3$ 以及 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$ 。

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ，我们有

$$3x^2-3y=3y^2-3x=0\ .$$

由此可得原函数的驻点为 $(1,1)$ 和 $(0,0)$ 。

对于这两个驻点，我们分别考虑 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 的值。

在 $(0,0)$ 处， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ ， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3$ 。由于 $0\cdot 0-(-3)^2<0$ ， 驻点 $(0,0)$ 不是极值点。

在 $(1,1)$ 处， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6$ ， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3$ 。由于 $6\cdot 6-(-3)^2>0$ 且 $6>0$ ， 驻点 $(1,1)$ 是极

小值点。

(6)

与 (1) 类似，略。

2.(1)

构造 Lagrange 函数（拉格朗日函数）

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-2)\ .$$

计算 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点。换言之，求解

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=y+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=x+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=x+y-2=0\end{aligned}$$

可得 $x=y=1,\lambda=-1$ 。

为了判断 $x=1,y=1$ 所对于的极点类型，我们计算

$$\begin{aligned}\mathsf{d}^2(xy)&=\mathsf{d}\left(\mathsf{d}(xy)\right)\\ &=\mathsf{d}(y\mathsf{d}x+x\mathsf{d}y)\\ &=\mathsf{d}y\mathsf{d}x+\mathsf{y}\mathsf{d}^2x+\mathsf{d}x\mathsf{d}y+x\mathsf{d}^2y\\ &=2\mathsf{d}x\mathsf{d}y.\end{aligned}$$

由于约束条件 $x+y-2=0$ ，两边同时求全微分，我们有 $\mathsf{d}x+\mathsf{d}y=0$ 。故而 $\mathsf{d}y=-\mathsf{d}x$ 。因此

$$\mathsf{d}^2(xy)=2\mathsf{d}x\mathsf{d}y=-2(\mathsf{d}x)^2\leq 0\ \square$$

从而 $x=1,y=1$ 是在约束条件 $x+y=2$ 下目标函数 xy 的最大值。

3.

(1)

为了计算 $z=f(x,y)=x^2+y^2-x-y$ 的最大/最小值，只需要考虑 $f(x,y)$ 在驻点和边界上的取值情况即可。

通过求解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-1=0 \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial y}=2y-1=0 \ \square$$

我们可得到 $x=y=\frac{1}{2}$ 。这也是在区域 $x^2+y^2\leq 1$ 内部关于 $f(x,y)$ 的唯一驻点。

通过带入 $x=y=\frac{1}{2}$ ，我们可以得到 $f(x,y)$ 在驻点处的取值。

为了得到 $f(x,y)$ 在边界 $x^2+y^2=1$ 出的最大/最小值，将此问题看为带约边界的条件极值问题。通过 Langrange 乘数法，可以得到 $f(x,y)$ 在边界$x^2+y^2=1$ 上的最大/最小值。

将 $f(x,y)$ 在边界 $x^2+y^2=1$ 上的最大/最小值与 $f(x,y)$ 在驻点出的最大/最小值进行比较，其中最大的就是 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值，其中最小的就是 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最小值。

(2)

与 (1) 类似，细节略去。

<u>练习7.7</u>

1.

(1)

参看书后答案。

(2)

参看书后答案。

2.

(1)

参看书后答案。

(5)

同上。

(6)

同上。

3.

(1)

同上。

(6)

同上。

(10)

同上。

(12)

同上。

6.(2)

同上。